

1. Úkoly měření

- a) Určete modul pružnosti v tahu přímou metodou pro dva vzorky různých materiálů a výsledky porovnejte s tabulkovými hodnotami.

2. Použité přístroje a pomůcky

- Přípravek na měření
- Přípravek se stupnicí a dalekohledem
- Pásové měřítko
- Posuvka
- Mikrometr
- Závaží

3. Naměřené hodnoty

- a) Tabulka neměřených hodnot pro zařízení s ocelovým měřeným vzorkem

měření	q [m]	Δq [m]	p [m]	Δp [m]
1	0,1024	-0,0010	0,0510	0,00006
2	0,1008	-0,0026	0,0510	0,00006
3	0,1008	-0,0026	0,0508	-0,00014
4	0,1110	0,0076	0,0513	0,00036
5	0,1020	-0,0014	0,0506	-0,00034
Σ	0,5170	-	0,2547	-

- aritmetický průměr naměřených hodnot je obecně dán rovnicí

$$x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

- pro délku páky je aritmetický průměr naměřených hodnot

$$q = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n q_i = \frac{1}{5} \cdot 0,5170 = 0,1034 \text{ m}$$

- pro vzdálenost upevnění drátu na páce je aritmetický průměr naměřených hodnot

$$p = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i = \frac{1}{5} \cdot 0,2547 = 0,05094 \text{ m}$$

- délka měřeného vzorku ocelového drátu při základním zatížení

$$l = 0,996 \text{ m}$$

- vzdálenost zrcátka od stupnice

$$a = 1 \text{ m}$$

- b) Výpočet pravděpodobné chyby pro specifické rozměry zařízení s ocelovým měřeným vzorkem

- pravděpodobná chyba je obecně dána

$$\vartheta(x) = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2}$$

- pravděpodobná chyba délky páky

$$\vartheta(q) = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\Delta q_i)^2} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{742 \cdot 10^{-7}}{20}} = 0,0012841 \text{ m} = 1,2841 \text{ mm}$$

- pravděpodobná chyba vzdálenosti upevnění drátu na páce

$$\vartheta(p) = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\Delta p_i)^2} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{272 \cdot 10^{-9}}{20}} = 0,0000777 \text{ m} = 0,0777 \text{ mm}$$

- pravděpodobná chyba délky ocelového drátu

$$\vartheta(l) = 0,001 \text{ m}$$

- pravděpodobná chyba vzdálenosti zrcátka od stupnice

$$\vartheta(a) = 0,001 \text{ m}$$

c) Tabulka naměřených hodnot průměru pro vzorek z ocelového drátu

měření	d [mm]	Δd [mm]
1	0,69	0,0033
2	0,69	0,0033
3	0,68	-0,0067
4	0,69	0,0033
5	0,68	-0,0067
6	0,70	0,0133
7	0,69	0,0033
8	0,68	-0,0067
9	0,69	0,0033
10	0,68	-0,0067
11	0,69	0,0033
12	0,69	0,0033
13	0,68	-0,0067
14	0,69	0,0033
15	0,68	-0,0067
Σ	10,3	-

- aritmetický průměr průměru drátu je obecně dán rovnicí

$$d = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i$$

- po dosazení hodnot dostaneme

$$d = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i = \frac{1}{15} \cdot 10,3 = 0,6867 \text{ mm} = 0,0006867 \text{ m}$$

- pravděpodobná chyba průměru drátu je obecně daná

$$\vartheta(d) = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\Delta d_i)^2}$$

- po dosazení hodnot dostaneme

$$\vartheta(d) = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\Delta d_i)^2} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{0,00053335}{210}} = 0,0011 \text{ mm} = 0,0000011 \text{ m}$$

d) Tabulka změn délky ocelového drátu při zatěžování

závaží	G_i [N]	n_i' [cm]	n_i'' [cm]	n_i [cm]	$n_i - n_0$ [cm]
0	0	30,00	30,00	30,00	0,00
1	9,80665	30,75	30,90	30,83	0,83
2	19,61330	31,50	31,70	31,60	1,60
3	29,41995	32,20	32,30	32,25	2,25
4	39,22660	32,80	32,90	32,85	2,85
5	49,03325	33,45	33,45	33,45	3,45
Σ	147,09975	-	-	-	10,975

e) Výpočet pružnosti v tahu oceli

- pružnost v tahu je obecně dána rovnicí

$$E = \frac{8alq \sum_i G_i}{\pi d^2 p^2 \sum_i \Delta n_i}$$

- po dosazení hodnot dostaneme

$$E = \frac{8alq \sum_i G_i}{\pi d^2 p^2 \sum_i \Delta n_i} = \frac{8 \cdot 0,996 \cdot 0,1034 \cdot 147,09975}{\pi \cdot 0,0006867^2 \cdot 0,05094^2 \cdot 10,975} = 28,73 \cdot 10^{10} Pa$$

f) Výpočet pravděpodobné chyby pružnosti v tahu oceli

- pravděpodobná chyba pružnosti v tahu je obecně dána rovnicí

$$\vartheta(E) = \frac{8 \sum_i G_i}{\pi d^2 p^2 \sum_i \Delta n_i} \sqrt{(lq)^2 \vartheta^2(a) + (aq)^2 \vartheta^2(l) + (al)^2 \vartheta^2(q) + (aq)^2 \vartheta^2(l) + \left(\frac{-2alg}{d}\right)^2 \vartheta^2(d) + \left(\frac{-2alg}{p}\right)^2 \vartheta^2(p) + \left(\frac{-alg}{\sum_i \Delta n_i}\right)^2 \vartheta^2\left(\sum_i \Delta n_i\right)}$$

- po dosazení dostaneme

$$\vartheta(E) = 0,4661^{10} Pa$$

g) Tabulka neměřených hodnot pro zařízení s bronzovým měřeným vzorkem

měření	q [m]	Δq [m]	p [m]	Δp [m]
1	0,1020	-0,0008	0,0508	0,0001
2	0,1010	-0,0018	0,0504	-0,0003
3	0,1020	-0,0008	0,0505	-0,0002
4	0,1108	0,0080	0,0508	0,0001
5	0,0982	-0,0046	0,0510	0,0003
Σ	0,5140	-	0,2535	-

- aritmetický průměr naměřených hodnot je obecně dán rovnicí

$$x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

- pro délku páky je aritmetický průměr naměřených hodnot

$$q = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n q_i = \frac{1}{5} \cdot 0,5140 = 0,1028 m$$

Stanovení modulu pružnosti v tahu přímou metodou

- pro vzdálenost upevnění drátu na páce je aritmetický průměr naměřených hodnot

$$p = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i = \frac{1}{5} \cdot 0,2535 = 0,0507 \text{ m}$$

- délka měřeného vzorku bronzového drátu při základním zatížení

$$l = 0,993 \text{ m}$$

- vzdálenost zrcátka od stupnice

$$a = 1 \text{ m}$$

h) Výpočet pravděpodobné chyby pro specifické rozměry zařízení s bronzovým měřeným vzorkem

- pravděpodobná chyba je obecně dána

$$\vartheta(x) = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\Delta x_i)^2}$$

- pravděpodobná chyba délky páky

$$\vartheta(q) = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\Delta q_i)^2} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{897 \cdot 10^{-7}}{20}} = 0,0014119 \text{ m} = 1,4119 \text{ mm}$$

- pravděpodobná chyba vzdálenosti upevnění drátu na páce

$$\vartheta(p) = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\Delta p_i)^2} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{240 \cdot 10^{-9}}{20}} = 0,0000730 \text{ m} = 0,0730 \text{ mm}$$

- pravděpodobná chyba délky bronzového drátu

$$\vartheta(l) = 0,001 \text{ m}$$

- pravděpodobná chyba vzdálenosti zrcátka od stupnice

$$\vartheta(a) = 0,001 \text{ m}$$

i) Tabulka naměřených hodnot průměru pro vzorek z bronzového drátu

měření	d [mm]	Δd [mm]
1	0,87	-0,002
2	0,87	-0,002
3	0,88	0,008
4	0,88	0,008
5	0,87	-0,002
6	0,88	0,008
7	0,87	-0,002
8	0,88	0,008
9	0,88	0,008
10	0,88	0,008
11	0,87	-0,002
12	0,86	-0,012
13	0,86	-0,012
14	0,86	-0,012
15	0,87	-0,002
Σ	13,08	-

- aritmetický průměr průměru drátu je obecně dán rovnicí

$$d = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i$$

- po dosazení hodnot dostaneme

$$d = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i = \frac{1}{15} \cdot 13,08 = 0,872 \text{ mm} = 0,000872 \text{ m}$$

- pravděpodobná chyba průměru drátu je obecně daná

$$\vartheta(d) = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\Delta d_i)^2}$$

- po dosazení hodnot dostaneme

$$\vartheta(d) = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\Delta d_i)^2} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{0,00084}{210}} = 0,0013 \text{ mm} = 0,0000013 \text{ m}$$

j) Tabulka změn délky bronzového drátu při zatěžování

G_i [N]	n_i' [cm]	n_i'' [cm]	n_i [cm]	$n_i - n_0$ [cm]
0	35,00	34,75	34,88	-0,13
4,90333	36,55	37,25	36,90	1,90
9,80665	38,10	37,75	37,93	2,93
14,70998	39,50	39,25	39,38	4,38
19,61330	40,90	39,75	40,33	5,33
24,51663	41,70	41,70	41,70	6,70
73,54988	-	-	-	21,100

k) Výpočet pružnosti v tahu bronzu

- pružnost v tahu je obecně dána rovnicí

$$E = \frac{8alq \sum_i G_i}{\pi d^2 p^2 \sum_i \Delta n_i}$$

- po dosazení hodnot dostaneme

$$E = \frac{8alq \sum_i G_i}{\pi d^2 p^2 \sum_i \Delta n_i} = \frac{8 \cdot 0,993 \cdot 0,1028 \cdot 73,54988}{\pi \cdot 0,000872^2 \cdot 0,0507^2 \cdot 0,211} = 4,64 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$$

l) Výpočet pravděpodobné chyby pružnosti v tahu bronzu

- pravděpodobná chyba pružnosti v tahu je obecně dána rovnicí

$$\vartheta(E) = \frac{8 \sum_i G_i}{\pi d^2 p^2 \sum_i \Delta n_i} \sqrt{(lq)^2 \vartheta^2(a) + (aq)^2 \vartheta^2(l) + (al)^2 \vartheta^2(q) + (aq)^2 \vartheta^2(l) + \left(\frac{-2alg}{d}\right)^2 \vartheta^2(d) + \left(\frac{-2alg}{p}\right)^2 \vartheta^2(p) + \left(\frac{-alg}{\sum_i \Delta n_i}\right)^2 \vartheta^2\left(\sum_i \Delta n_i\right)}$$

- po dosazení dostaneme

$$\vartheta(E) = 0,0704^{10} \text{ Pa}$$

4. Závěr

Modul pružnosti v tahu pro vzorek ocelového drátu se liší oproti tabulkové hodnotě ($21,0 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$) o $+36,8 \%$. U vzorku bronzového drátu je odchylka od tabulkové hodnoty ($9,95 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$) $-53,4\%$. Tyto odchylky byly s největší pravděpodobností způsobeny opotřebením vzorků drátů a nepřesným změřením specifických rozměrů měřicího zařízení (parametry q , p , a).

- modul pružnosti v tahu pro ocel $E = (28,73 \cdot 10^{10} \pm 0,47 \cdot 10^{10}) \text{ Pa}$
- modul pružnosti v tahu pro bronz $E = (4,64 \cdot 10^{10} \pm 0,07 \cdot 10^{10}) \text{ Pa}$